Теорема 1 (единственности). *Пусть функция $f: G \to \mathbb{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbb{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\} \subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ и такая, что $f(z_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv 0$ на области G.*

Доказательство. 1) Пусть Γ — граница области G и число $\rho_0 \triangleq \operatorname{dist}(a, \Gamma)$ — расстояние от точки a до границы Γ. Тогда очевидно, что $0 < \rho_0 \leqslant +\infty$. Так как функция f регулярна на круге $B_{\rho_0}(a) \subset G$, то по теореме 1 из §9 функция f представима в этом круге в виде сходящегося ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{1}$$

Покажем, что коэффициенты $c_n = 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Допустим противное. Пусть найдется коэффициент $c_m \neq 0$, при этом $m \geqslant 1$ (так как в силу непрерывности f в точке a из условия теоремы следует, что $f(a) = 0$). Тогда ряд (1) принимает вид

$$f(z) = (z-a)^m \left(c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots\right), \tag{2}$$

т. е. функцию f можно переписать в виде

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \tag{3}$$

где функция h как сумма сходящегося степенного ряда (в силу следствия 2 §9) регулярна в круге $B_{\rho_0}(a)$, причем $h(a) = c_m \neq 0$. В силу этого и в силу непрерывности h существует число $r_0 \in (0, \rho_0)$ такое, что $h(z) \neq 0\ \forall z \in B_{r_0}(a)$. Так как $(z-a)^m \neq 0\ \forall z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$, то из равенства (3) получаем, что $f(z) \neq 0$ при всех $z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$. Но это противоречит условию, согласно которому $f(z_n) = 0$, причем $z_n \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$ при достаточно больших n. Следовательно, все коэффициенты $c_n = 0$ в ряде (1), а потому $f(z) \equiv 0$ на круге $B_{\rho_0}(a)$.

2) Докажем, что $f(b) = 0$ в произвольной точке $b \in G \setminus B_{\rho_0}(a)$. Соединим точки a и b произвольным кусочно-гладким контуром $\gamma \subset G$. Пусть $\rho \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{dist}(\gamma, \Gamma)$. Очевидно, что $\rho > 0$, $\rho \leqslant \rho_0$. Легко можно указать конечное множество кругов $B_0, B_1, \ldots, B_m$ одинакового радиуса $\rho > 0$ таких, что $B_k \stackrel{\triangle}{=} B_\rho(\zeta_k)$, где все центры ζ_k лежат на кривой γ, причем $\zeta_0 = a$, $\zeta_m = b$, и справедлива оценка $|\zeta_k - \zeta_{k-1}| \leqslant \rho/2 \quad \forall k \in \overline{1, m}$. По построению очевидно включение $\zeta_{k+1} \in B_k \cap B_{k+1}$ для всех $k \in \overline{0, m-1}$ (см. рис. 1).

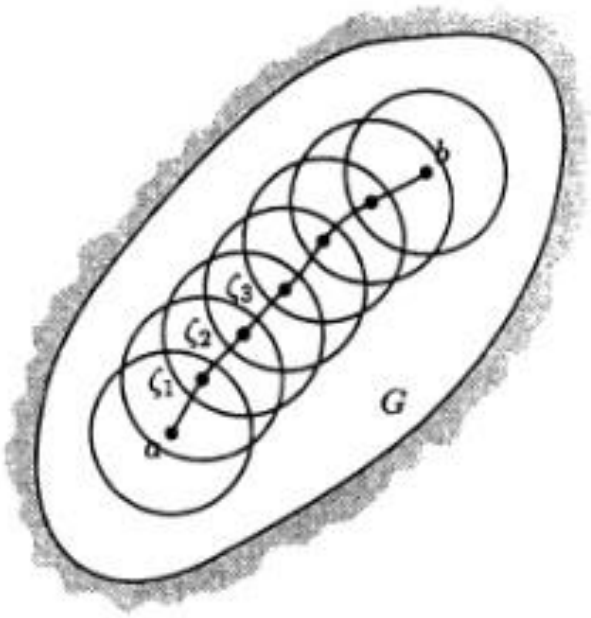

Рис. 1

Так как $\rho_0 \geqslant \rho$, то по доказанному в пункте 1 функция $f(z) = 0$ на круге $B_0 = B_\rho(a)$.

Рассмотрим функцию f на круге B_1. Так как $f(z) = 0$ при всех $z \in B_0 \cap B_1$, и так как очевидно существует нестационарная последовательность $\{z_n^1\} \subset B_0 \cap B_1$ такая, что $z_n^1 \to \zeta_1$ при $n \to \infty$, т. е. $f(z_n^1) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, то отсюда аналогично пункту 1) следует, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_1. Продолжая аналогичные рассуждения из того, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_{k-1}, получим, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_k при любом $k \in \overline{1, m}$, что в итоге и дает равенство $f(b) = 0$. ■

Следствие 1. *Пусть даны область G и множество $E \subset G$, содержащее последовательность различных точек, сходящуюся к точке из G. Пусть функции f и $g : G \to \mathbb{C}$ регулярны в области G и $f(z) = g(z)$ при всех $z \in E$. Тогда $f \equiv g$ в области G.*

Доказательство. Введем функцию $h(z) \stackrel{\triangle}{=} f(z) - g(z)$, она регулярна в области G и по условию $h(z) = 0 \; \forall z \in E$. Тогда по теореме 1 функция $h(z) \equiv 0$ на G, что и влечет требуемое равенство. ■

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 может оказаться несправедливым, если $a \notin G$. Например, рассмотрим функцию $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Она регулярна, а при $z_n = \frac{1}{2\pi n}$ функция $f(z_n) = 0$, но очевидно, что $\sin \frac{1}{z} \not\equiv 0$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.